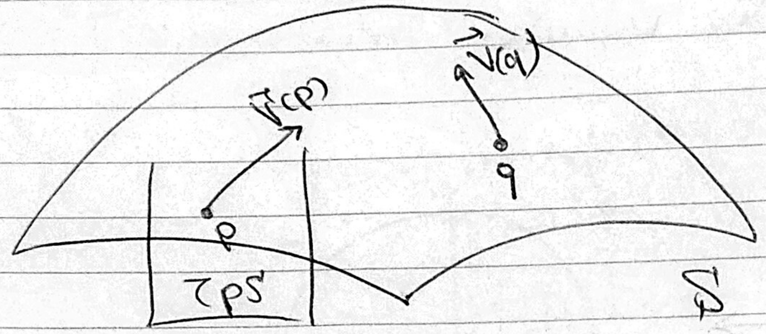
24/04/2018

Ολική Διαφορική Γεωμετρία

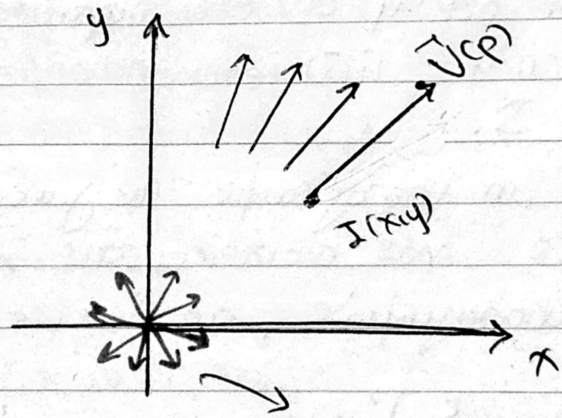
Διανυσματικά πεδία σε κανονικές επιφάνειες:



<u>Ορισμός</u>: Καλούμε <u>διαφορίσιμο διανυσματικό</u> πεδίο μιας κανονικής επιφάνειας S κάθε απεικόνιση $\vec{V}: S \to \mathbb{R}^3$ αν $\forall p \in S$ $\vec{V}(p) \in T_pS$

<u>Παράδειγμα</u> $S = \Pi$ (επίπεδο) $\equiv \mathbb{R}^2$

$\vec{V}(x,y) = (x,y)$



Το μηδενικό διάνυσμα έχει όλες τις δυνατές διευθύνσεις

$\vec{V}(0,0) = (0,0)$

Εάν τοποθετήσει μια πηγή φωτός σε αυτό το σημείο θα δημιουργηθούν καμπύλες που εφάπτονται του διανυσματικού πεδίου σε κάθε σημείο (ακτίνες φωτός)

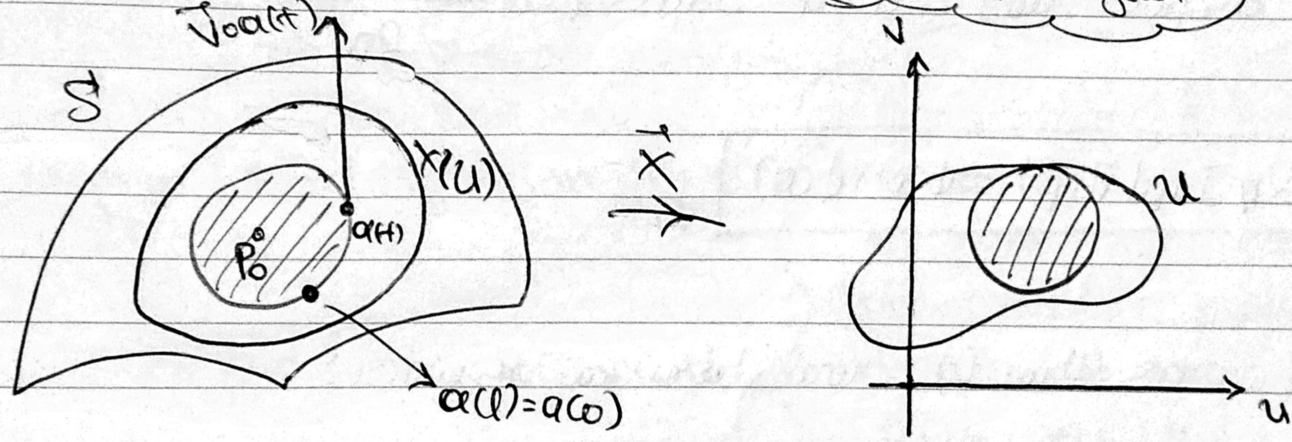
<u>Ορισμός</u>: Το σημείο $p \in S$ καλείται <u>ιδιάζον</u> σημείο του διαν. πεδίου $\vec{V}$ της S αν $\vec{V}(p) = 0$. Το ιδιάζον σημείο p του $\vec{V}$ καλείται <u>μεμονωμένο</u> αν $\exists$ περιοχή $U(p)$ στην S αν το $p \in V(p)$ είναι το μοναδικό ιδιάζον σημείο του $\vec{V}$ στο $U(p)$

[Ένα ιδιάζον σημείο συμπεριφέρεται "καλά" αν είναι μεμονωμένο.]

Σύμβαση Υποθέτουμε ότι τα διανυσματικά πεδία μας έχουν ιδιάζοντα σημεία

Δείκτης Διανυσματικών Πεδίων Γύρω Από Ιδιάζοντα Σημεία.

Έστω $\vec{V}$ διανυσματικό πεδίο κανονικής επιφάνειας S και p_0 ένα μεμονωμένο ιδιάζον σημείο του $\vec{V}$. Θεωρώ ένα σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ με $p_0 \in X(U)$ και $\alpha: [0,l] \to X(U)$ απλή κλειστή καμπύλη η οποία είναι το σύνορο μιας απλής περιοχής (≡ ομοιομορφική με τον κλειστό δίσκο) η οποία <u>δεν</u> περιέχει κανένα άλλο ιδιάζον σημείο του $\vec{V}$ εκτός του p_0 → αυτό σημαίνει ότι δεν μηδενίζεται



$V\circ\alpha(t)$, $X_u(\alpha(t))$, $t\in[0,l]$. Τότε υπάρχει διαφορίσιμη γωνιακή συνάρτηση $\phi:[0,l]\to\mathbb{R}$ που

$$\phi(t) = \measuredangle\left(\overrightarrow{V\circ\alpha(t)}, X_u\right), \quad t\in[0,l]$$

$\phi(l)-\phi(0) = 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$ γιατί $\alpha(0)=\alpha(l)$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από μια περιστροφή θα επιστρέψει στην αρχική του θέση

<u>Ορισμός</u>: Ο <u>ακέραιος</u> $Ind(\vec{V}, p_0) = \dfrac{\phi(l)-\phi(0)}{2\pi}$ καλείται δείκτης του διανυσματικού πεδίου $\vec{V}$ στο ιδιάζον σημείο του p_0.

Πρόταση: Ο ορισμός του δείκτη είναι καλός, δηλ ανεξάρτητος της επιλογής του ανυσματος συντεταγμένων και της καμπύλης α (ανεξάρτητος δηλ της απλής περιοχής)

Θεωρώ $w \in T_{\alpha(0)}S$, $\|w\|=1$. Τότε $\exists$ μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο $w(t)$ κατά μήκος της α ώστε $w(0)=w$

Οι παράλληλες μεταφορές διατηρούν τα μήκη.

$$\boxed{\iint_R K d\sigma = \psi(l)-\psi(0)} \quad (1)$$

, όπου $\psi(t)=\measuredangle(w(t), x_u)$

Ο ορισμός μας λέει ότι $Ind(\vec{V},p_0)=\dfrac{\phi(l)-\phi(0)}{2\pi}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{2\pi\, Ind(\vec{V},p_0)=\phi(l)-\phi(0)} \quad (2)$$

Αφαιρώ τις (1) και (2) κατά μέλη και προκύπτει:

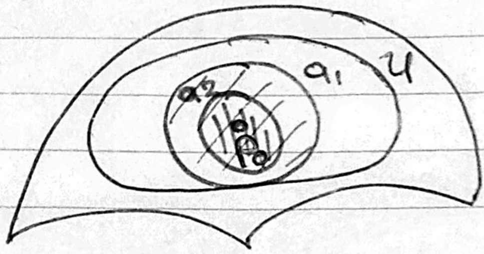
$$\iint_R K d\sigma - 2\pi\, Ind(\vec{V},p_0) = (\psi-\phi)(l)-(\psi-\phi)(0)$$

όπου εμπεριέχεται η γωνιακή συνάρτηση $\psi-\phi=\measuredangle(\vec{V}_{o\alpha}, w)$

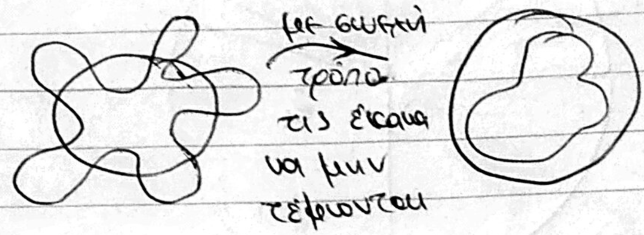
Παρατηρούμε πως δεν υπάρχει κάπου το σύστημα συντεταγμένων άρα αποδείχθηκε η ανεξαρτησία από το $\vec{x}$

$\longrightarrow$

Αν όμως είχα ακόμα μία καμπύλη που να μην τέμνονται οι 2 καμπύλες (συμπαράγουν ένα σχήμα που είναι τοπολογικά δακτύλιος). Δημιουργούν οι δύο καμπύλες δύο απλές κλειστές περιοχές.



Θα μπορούσα να είχα πάρει δύο άλλες καμπύλες, όπως:



Μια συνάρτηση που λαμβάνει τιμές είναι η σταθερή γιατί αλλιώς θα ισχύε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Οποιεσδήποτε 2 καμπύλες στο επίπεδο (όχι τρύπιο) εν γένει δεν είναι ομοτοπικές γτ μπορώ να μετακινήσω κατά συνεχή τρόπο την μία ώστε να συμπέσει με την άλλη. Αν ήταν τρύπιο δεν μπορώ

Είναι $2\pi \, Ind(\vec{V}(P_0) = \phi(\ell) - \phi(0)$

άρα για $a_s \in [0,\ell]$

$$\frac{\Phi_s(\ell) - \Phi_s(0)}{2\pi} = \text{σταθ.}$$ άρα ανεξαρτησία

<u>Ορισμός</u>: Έστω $a_0, a_1 : [0,\ell] \to S$ είναι συνεχείς καμπύλες. Καλούμε ομοτοπία μεταξύ των a_0, a_1 κάθε συνεχή απεικόνιση $H : [0,\ell] \times [0,1] \to S$ τω

$H(t,0) = a_0(t)$ και $H(t,1) = a_1(t)$

Οι a_0, a_1 καλούνται ομοτοπικές $\Leftrightarrow \exists$ ομοτοπία

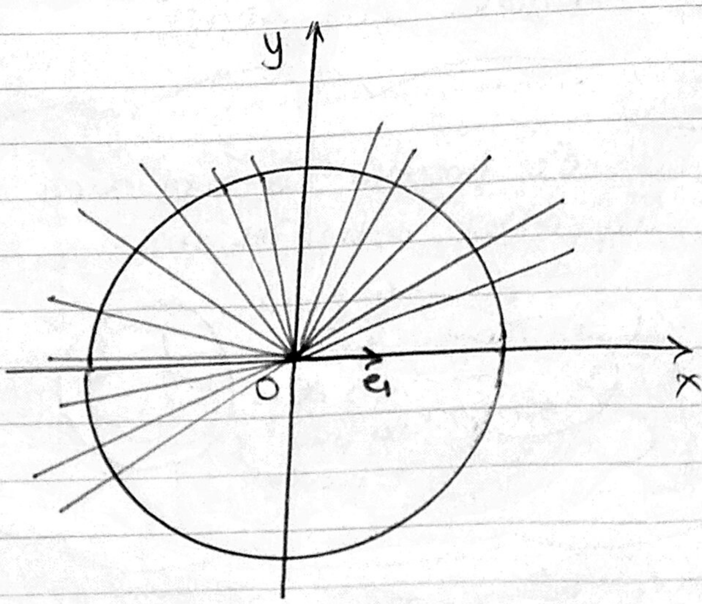
$\longrightarrow \longrightarrow$

Παραδείγματα

① $S \equiv \mathbb{R}^2$, $\vec{V}(x,y) = (x,y)$

$\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

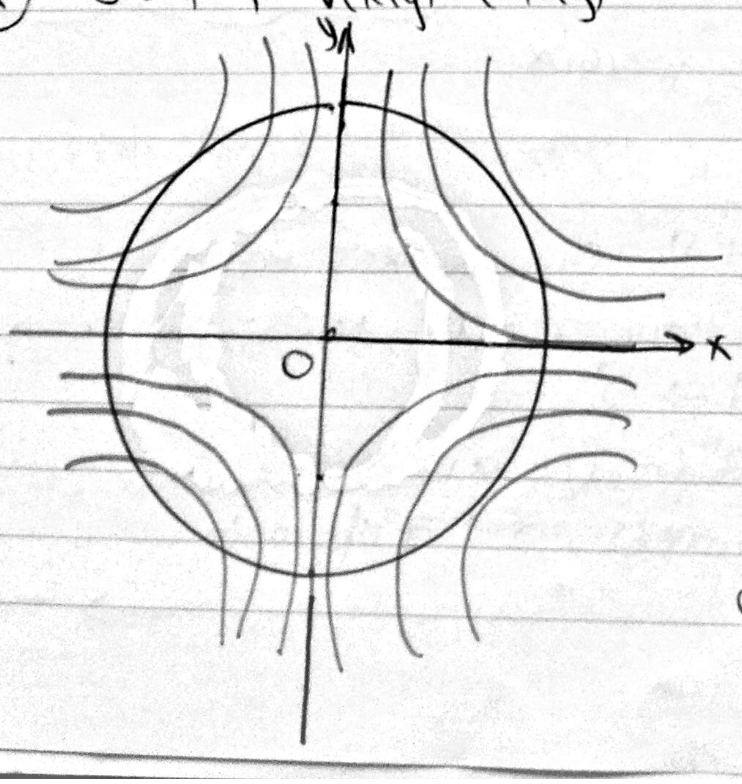


$\vec{V}\circ\alpha(t) = \vec{V}(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t)$

$\phi(t) = \measuredangle(\vec{V}\circ\alpha(t), e_1) = t$

$Ind(\vec{V},0) = \dfrac{\phi(2\pi)-\phi(0)}{2\pi} = \dfrac{2\pi-0}{2\pi} = 1.$

② $S \equiv \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = (-x,y)$



Το $O(0,0)$ είναι το μοναδικό ιδιάζον σημείο του $\vec{V}$

$\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

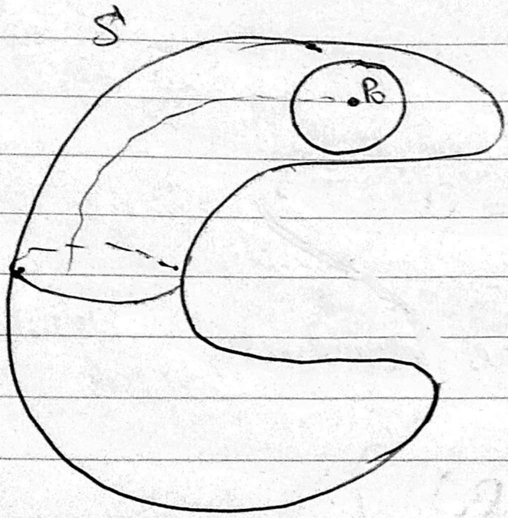
$\vec{V}\circ\alpha(t) = \vec{V}(\cos t, \sin t) =$
$= (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$

$\phi(t) = \measuredangle(\vec{V}\circ\alpha(t), \vec{e}_1) = \pi - t$

$$\text{Ind}(\vec{V},0) = \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{(\pi - 2\pi) - (\pi - 0)}{2\pi} = -1$$

Εάν οι δείκτες σε κάθε σημείο είναι 0, τότε $\nexists$ ιδιάζον σημείο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΑ ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΕ ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.



S είναι συμπαγής και $\vec{V}$ διαν. πεδίο με άπειρον σημεία ιδιάζοντα. Έστω (p_n) ακολουθία ιδιαζόντων σημείων με $\lim p_n = p_0 \in S$, $\vec{V}(p_n) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(p_0) = 0$

Συμπέρασμα: Κάθε διαν. πεδίο με ιδιάζοντα σημεία σε συμπαγή επιφάνεια έχει πεπερασμένο πλήθος ιδιαζόντων σημείων

$\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_F\}$

Έστω ότι $\{p_1, \dots, p_k\}$ τα ιδιάζοντα σημεία του $\vec{V}$ στην συμπαγή επιφάνεια S. Θεωρώ τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ της S τω κάθε τρίγωνο που περιέχει ιδιάζον σημείο τότε το περιέχει στο εσωτερικό του. Επίσης, θεωρώ οικογένεια συστήματος συντεταγμένων $\{X_a\}_{a \in A}$ της S τα οποία καλύπτουν την S και κάθε τρίγωνο της $\mathcal{T}$ περιέχεται σε κάποια περιοχή συντεταγμένων.

$$\iint_{T_i} K d\sigma - 2\pi \mathrm{Ind}(\vec{V}, p_i) = \underline{\Delta}(\psi - \phi) \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{F} \iint_{T_i} K d\sigma - 2\pi \sum_i \mathrm{Ind}(\vec{V}, p_i) = 0 \Rightarrow$$

η ολική καμπ. Gauss της επιφάνειας

$$\Rightarrow \iint_S K d\sigma = 2\pi \sum_i \mathrm{Ind}(\vec{V}, p_i)$$

|| ολικό G-B.

$2\pi \chi(S)$

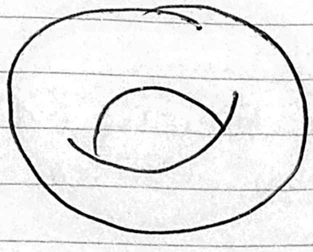
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \chi(S) = \sum_i \mathrm{Ind}(\vec{V}, p_i)$$

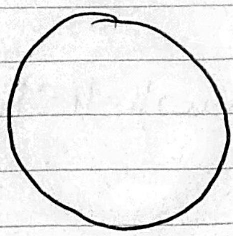
Θεώρημα Poincare: Έστω $\vec{V}$ διαν. πεδίο σε συμπαγή επιφάνεια S με ιδιάζοντα σημεία $p_1, \dots, p_k$. Τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{k} Ind(\vec{V}, p_i) = \chi(S)$$

$$\chi(S) = 2 - 2g(S)$$



$\chi = 0$



$\chi = 2$.

Πόρισμα: Κάθε διαν. πεδίο στην S^2 έχει ιδιάζοντα σημεία

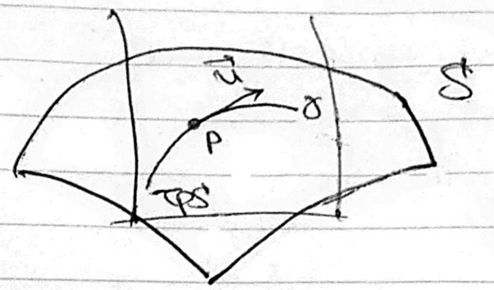
$\longrightarrow$ ή σε επιφάνεια ομοιομορφική με τη σφαίρα.

Πόρισμα: Αν S επιφάνεια που δέχεται διαν. πεδίο χωρίς ιδιάζοντα σημεία τότε είναι ομοιομορφική με τόρο.

Πόρισμα (της ΔΦΓεωμ.): Κάθε συμπαγής επιφάνεια με $K > 0$ έχει ένα τουλάχιστον ομφαλικό σημείο.

Απόδειξη: Έστω ότι δεν έχει ομφαλικά σημεία. Τότε ορίζονται τα διανυσματικά πεδία των κύριων διευθύνσεων άρα δεν έχει ιδιάζοντα σημεία $\Rightarrow S \simeq T =$ τόρος.

$$\underbrace{\iint_S K \, d\sigma}_{>0} = \underbrace{2\pi \chi(S)}_{\chi(S) > 0}$$



Για $p \in S'$ και $\vec{v} \in T_pS'$ υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S'$ με $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$

$$t \mapsto \gamma(t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Συμβολισμός $\gamma(t) = \gamma(t; p, \vec{v})$

Ισχύει: $\|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(0)\| = \|\vec{v}\|$ αν το αρχικό διάνυσμα (η αρχική ταχύτητα) ήταν μηδενικό.

Λήμμα (ομοιογένεια των γεωδαισιακών): Εστω η γεωδαισιακή $\gamma(t; p, v)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Θεωρώ $\lambda > 0$. Η γεωδαισιακή $\gamma(t; p, \lambda\vec{v})$ ορίζεται για $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)$ και ισχύει

$$\gamma(t; p, \lambda\vec{v}) = \gamma(\lambda t; p, \vec{v})$$

← προσαρμόζοντας την ταχύτητα προσαρμόζω τον χρόνο

Απόδ: Θέτω $\gamma(t) = \gamma(t; p, \vec{v})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Θεωρώ την γεωδαισιακή $\beta(t) = \gamma(\lambda t)$ με $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\beta'(t) = \lambda\gamma'(\lambda t)$

$\beta''(t) = \lambda^2\gamma''(\lambda t) \perp S' \Rightarrow$ η β είναι γεωδ. και ορίζεται

Η $\beta(t)$ είναι πάλι γεωδ. γιατί προήλθε με γραμμικό τρόπο από γεωδ.

όταν $-\varepsilon < \lambda t < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{\lambda} < t < \frac{\varepsilon}{\lambda}$

Επίσης, $\beta(0) = \gamma(\lambda \cdot 0) = \gamma(0) = p$ (ξεκινάει από το σημείο p)

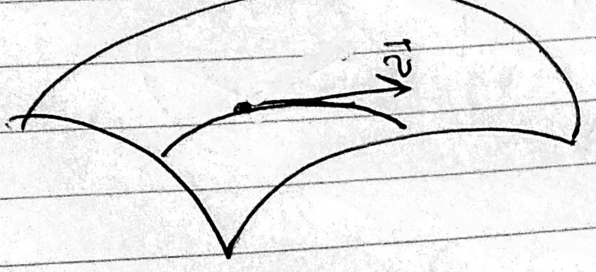
⟶

$\beta'(0) = \lambda\gamma'(0) = \lambda\vec{v}$

Άρα από $\beta(0)$ ∧ $\beta'(0)$ προκύπτει ότι

$$\left.\begin{array}{l} \beta(t) = \gamma(t; p, \lambda\vec{v}) \\ \beta(t) = \gamma(\lambda t) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(\lambda t) = \gamma(t; p, \lambda\vec{v})$$

$$\gamma(\lambda t; p, \vec{v}) = \gamma(t; p, \lambda\vec{v})$$



$\gamma(t) = \gamma(t; p, \vec{v})$

$\vec{v} \neq \vec{0}$, $\gamma(1; p, \vec{v}) = \gamma\left(1; p, \overset{\lambda}{\|\vec{v}\|} \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$ λήμμα

$= \gamma\left(1\|\vec{v}\|, p, \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$ Δηλαδή $\gamma(t; p, \vec{v}) = \gamma\left(\|\vec{v}\|, p, \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$

$\longrightarrow$

Εκθετική Απεικόνιση.

Ορισμός: Έστω p σημείο κανονικής επιφάνειας S. Καλούμε εκθετική απεικόνιση της S στο p την απεικόνιση:

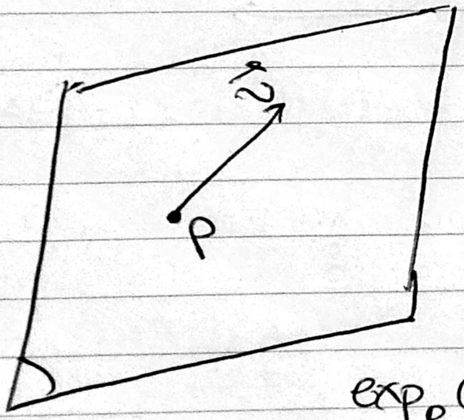
$$\exp_p : A \subset T_pS \to S$$

$$A \ni \vec{v} \mapsto \exp_p(\vec{v}) = \gamma(1; p, \vec{v})$$

$$\exp_p(\vec{v}) = \begin{cases} p, & \vec{v} = \vec{0} \\ \gamma\left(\|\vec{v}\|; p, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right), & \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Παραδείγματα:

(1ο) $S = \Pi$ ← επίπεδο , $T_p\Pi = \Pi$



Ποιά είναι η γεωδ. που διέρχεται από το p τη χρονική στιγμή t με ταχύτητα $\vec{v}$;

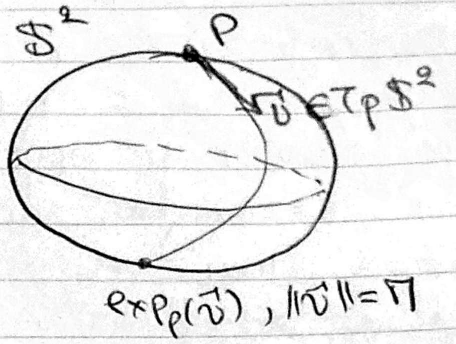
$$\gamma(t; p, \vec{v}) = p + t\vec{v}$$

$$\exp_p(\vec{v}) = \gamma(1; p, \vec{v}) = p + \vec{v}$$

Εδώ $\exp_p : T_p\Pi \to \Pi$ (ορίζεται σε όλο το εφαπτόμενο επίπεδο) και είναι 1-1 γιατί οι γεωδ. απομακρύνονται συνεχώς (δεν τέμνονται ξανά πέρα από το κοινό τους σημείο από το οποίο ξεκινάν)

(2ο) Σφαίρα.

$$S = S^2$$



$$exp_p(\vec{v}) = \gamma(1; p, \vec{v}) =$$

$$= \begin{cases} p & , \vec{v} = \vec{0} \\ \gamma\left(\|\vec{v}\|, p, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) & , \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Οι γεωδ. της σφαίρας ορίζονται για όλες τις τιμές της παραμέτρου

$$\gamma(t, p, \vec{v}) = \cos(t\|\vec{v}\|)p + \sin(t\|\vec{v}\|)\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$
$$\vec{v} \neq \vec{0}$$

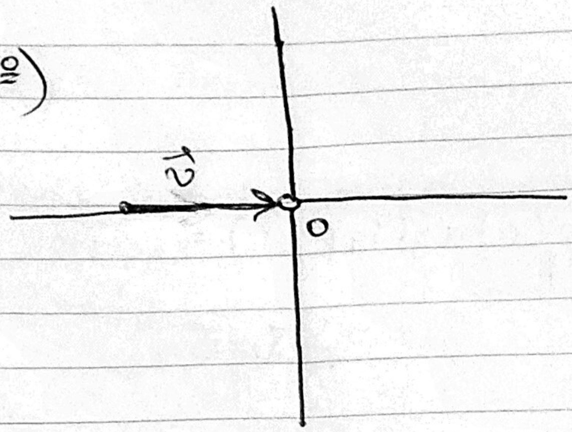
Αρα :

$$exp_p(\vec{v}) = \begin{cases} p & , \vec{v} = \vec{0} \\ \cos\|\vec{v}\|p + \sin\|\vec{v}\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} & , \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Εδώ $exp_p : T_pS^2 \to S^2$ όμως όχι 1-1. γιατί οι γεωδ. μετά από κάποιο χρόνο αρχίζουν και συγκλίνουν και μετά από χρόνο t ταυτίζονται

$\longrightarrow$

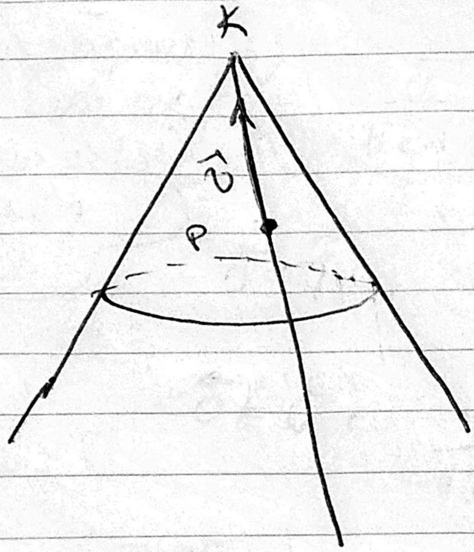
(3ο)



$S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

δεν ορίζεται γενικά εδώ η εκθετική απεικόνιση, γιατί όταν πάμε προς τα δεξιά υπάρχει ένα φράγμα, ενώ προς τ' αριστερά είναι οκ.
Εδώ δεν ορίζεται το εφ. επίπεδο

(4ο)



Το $exp_p(\vec{v})$ ορίζεται μόνο όταν

$$\|\vec{v}\| < d(p, K)$$

(Δεν πρέπει να "χωρήσει" το $\vec{v}$ το K)

Άρα δεν ορίζεται γενικά σε αυτό το παράδειγμα η εκθετική

Πρόταση: Έστω p σημείο κανονικής επιφάνειας S. Τότε υπάρχει αριθμός $\varepsilon(p) > 0$: η exp_p να ορίζεται στο σύνολο

$$B_\varepsilon(0) = \{\vec{v} \in T_pS \ / \ \|\vec{v}\| < \varepsilon\}$$

και επιπλέον η εκθετική απεικόνιση στην S να είναι διαφορομορφισμός στην εικόνα της

↓

<u>Απόδ</u>: Από ΣΔΕ (συνήθεις διαφορικές εξισώσεις) γνωρίζω ότι

($\forall p \in S$) ($\exists$ $\varepsilon(p) > 0$, ανοικτή περιοχή στο S, αριθμός

$\delta(p) > 0$ και λεία συνάρτηση $\gamma(t; p, \vec{v})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $p \in V$

και θέλω $\|\vec{v}\| < \delta$

Χρησιμοποιώ : $\gamma(t; p, \lambda\vec{v}) = \gamma(\lambda t; p, \vec{v})$ ιδιότητα ομογένειας

για $-\varepsilon < t < \varepsilon$ για $-\frac{\varepsilon}{\lambda} < t < \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

Οπότε θα "πειράξω" την ταχύτητα ώστε με το κατάλληλο λ να προκύψει διάστημα που να ισχύει $\frac{\varepsilon}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\varepsilon}{2}$.

Άρα $\exists$ $\hat{\varepsilon}(p) > 0$: $\gamma(t; p, \vec{v})$ να ορίζεται για $p \in V$ και

$\|\vec{v}\| < \hat{\varepsilon}(p)$, $t \in (-2, 2)$ ← προσάρμοσα την ταχύτητα με την ιδιότητα των γεωδ.

(Τώρα θέλω να είναι και διαφορομορφισμός.)

$\Rightarrow$ $\exp_p : B_{\hat{\varepsilon}}(0) \subset T_pS \to S$ διαφορίσιμη.

Θα υπολογίσω $d(\exp_p)_0 : T_0(T_pS) = T_pS \to T_{\exp_p(0)}S = T_pS$

άρα θα είναι απεικόνιση ενδομορφισμός του εφαπτ. επιπέδου.

$d(\exp_p)(w) = \tilde{c}'(0)$, $\tilde{c} = \exp_p \circ c$, $c : (-\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}) \to T_pS$

$c(t) = 0 + tw = tw$ ⟶

$$\tilde{c}(t) = \exp_p(c(t)) = \exp_p(tw) = \gamma(1; p, tw) = \gamma(t; p, w)$$

$$\tilde{c}'(0) = w \quad , \quad \boxed{d(\exp_p)_0(w) = w}$$

Το διαφορικό της εκθετική απεικ. στο 0 είναι η ταυτοτική απεικ. στο αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο.